



ce
pre
UNI

**CICLO
PRE 2024 - I**

Trigonometría

✓ **IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
DE ARCOS COMPUESTOS**



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ARCOS

La utilidad de estas identidades radica en que con ellas se puede calcular razones trigonométricas de arcos desconocidos a partir de arcos cuyas razones trigonométricas son conocidas.

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

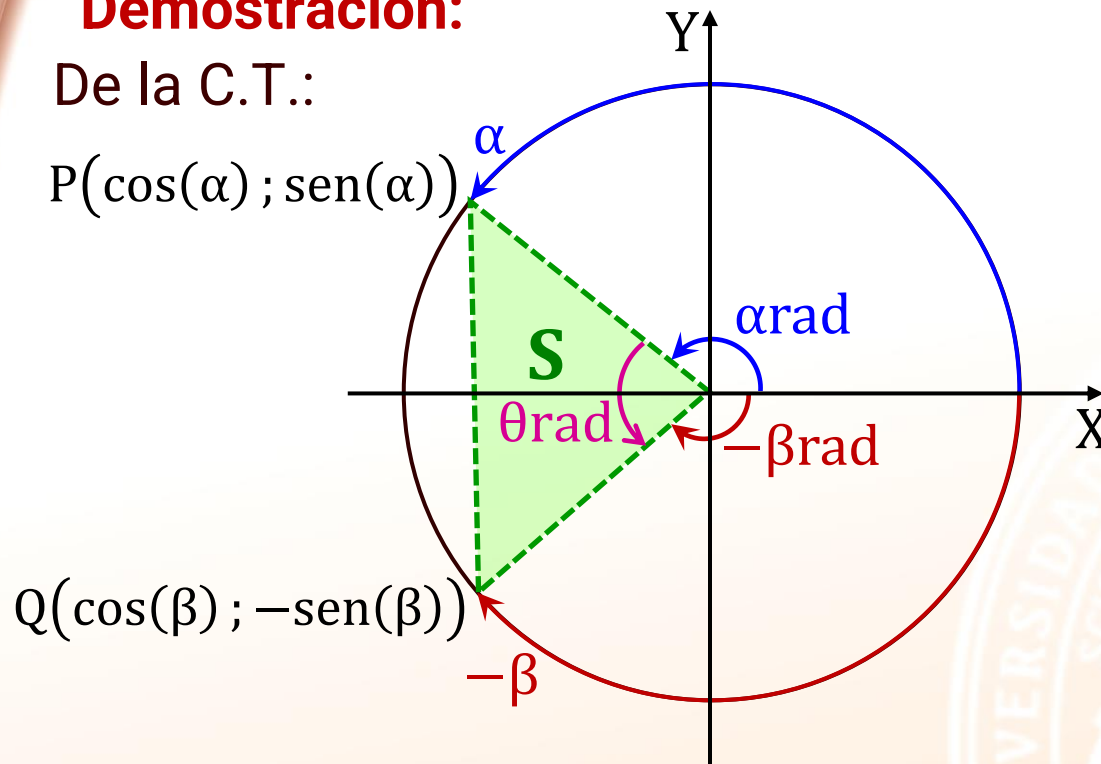
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Demostración:

De la C.T.:



Área de la región triangular S:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} (-\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta)) \quad (1)$$

Tenemos: $\theta + \alpha + \beta = 2\pi$

Además, el área de la región triangular también se calcula como:

$$S = \frac{1 \cdot 1}{2} \sin(\theta) = \frac{-\sin(\alpha + \beta)}{2} \quad (2)$$

De (1) y (2):

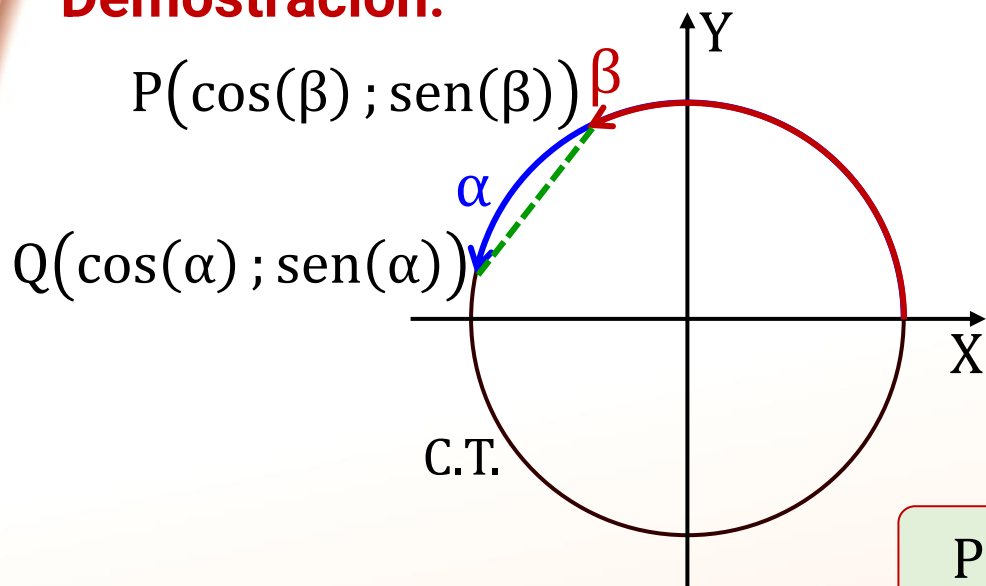
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Reemplazamos β por $-\beta$:

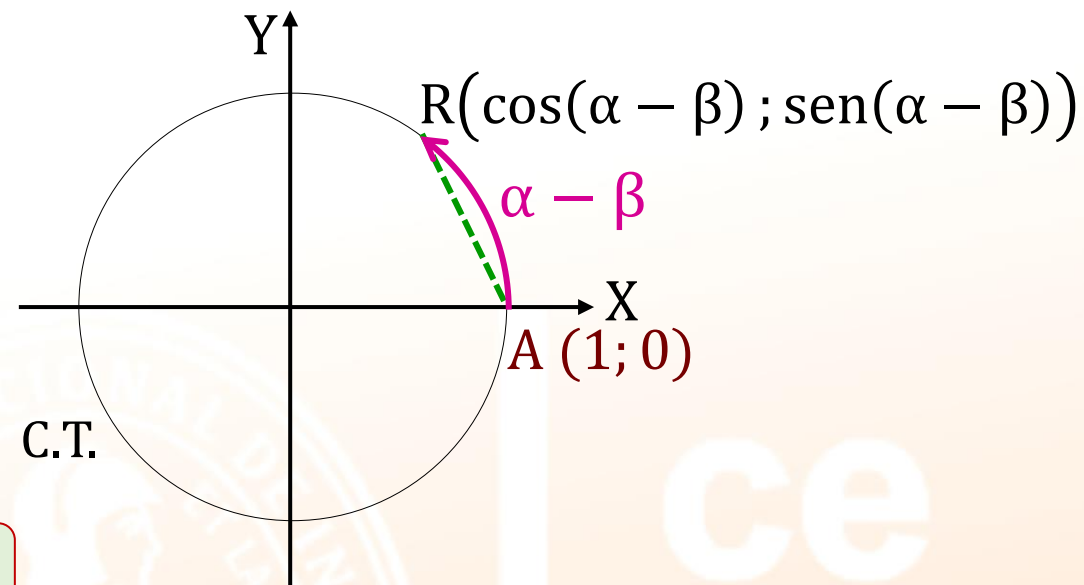
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$$

Demostración:



$$PQ = AR$$



$$\sqrt{(\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\text{sen}(\alpha) - \text{sen}(\beta))^2} = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\text{sen}(\alpha - \beta))^2}$$

Desarrollamos: $-2 \cos(\alpha) \cos(\beta) - 2 \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) = -2 \cos(\alpha - \beta)$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$$

Reemplazamos β por $-\beta$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Demostración:

De las identidades por división:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)} = \frac{\frac{\sin(\alpha) \cancel{\cos(\beta)}}{\cancel{\cos(\alpha)} \cancel{\cos(\beta)}} + \frac{\cancel{\cos(\alpha)} \sin(\beta)}{\cancel{\cos(\alpha)} \cancel{\cos(\beta)}}}{\frac{\cancel{\cos(\alpha)} \cancel{\cos(\beta)}}{\cancel{\cos(\alpha)} \cancel{\cos(\beta)}} - \frac{\sin(\alpha) \sin(\beta)}{\cancel{\cos(\alpha)} \cancel{\cos(\beta)}}}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Reemplazamos β por $-\beta$:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

PROBLEMA 01

Calcule el valor aproximado de $3\sqrt{3} - 10\text{sen}(7^\circ)$.

CLAVE D

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

PROBLEMA 02

Reduzca la expresión:

$$\frac{\cos(x - y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y)}{\text{sen}(x + y) - \text{sen}(y)\cos(x)}$$

CLAVE DA) $\text{sen}(x)$ B) $\cos(x)$ C) $\tan(x)$ D) $\cot(x)$ E) $\sec(x)$

PROBLEMA 03

Reduzca la expresión: $\frac{2\operatorname{sen}(x + 30^\circ) - \sqrt{3}\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{2}\operatorname{sen}(x + 45^\circ) - \cos(x)}$

CLAVE D

A) $\sqrt{3}\tan(x)$

B) $\sqrt{3}\cot(x)$

C) $\sqrt{2}\tan(x)$

D) $\cot(x)$

E) 1

PROBLEMA 04

Sean: $\operatorname{sen}(\alpha) = 2\operatorname{sen}(\beta)$ y $\cos(\beta) = 3\cos(\alpha)$, calcule el valor de $\cos(\alpha - \beta)$.

A) $-5/7$

B) $-3/7$

C) $3/7$

D) $5/7$

E) $6/7$

CLAVE D

PROBLEMA 05

Si: $\tan(2a + b) = 0,6$ y $\tan(a - b) = 0,25$.
Calcule el valor de $\tan(3a)$.

CLAVE E

- A) $7/9$ B) $2/3$ C) $2/7$ D) $9/7$ E) 1

PROBLEMA 06

En los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un cuadrado $ABCD$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, de tal forma que $AP = PB$ y $BQ = 3QC$. Calcule la tangente de la medida del ángulo PDQ .

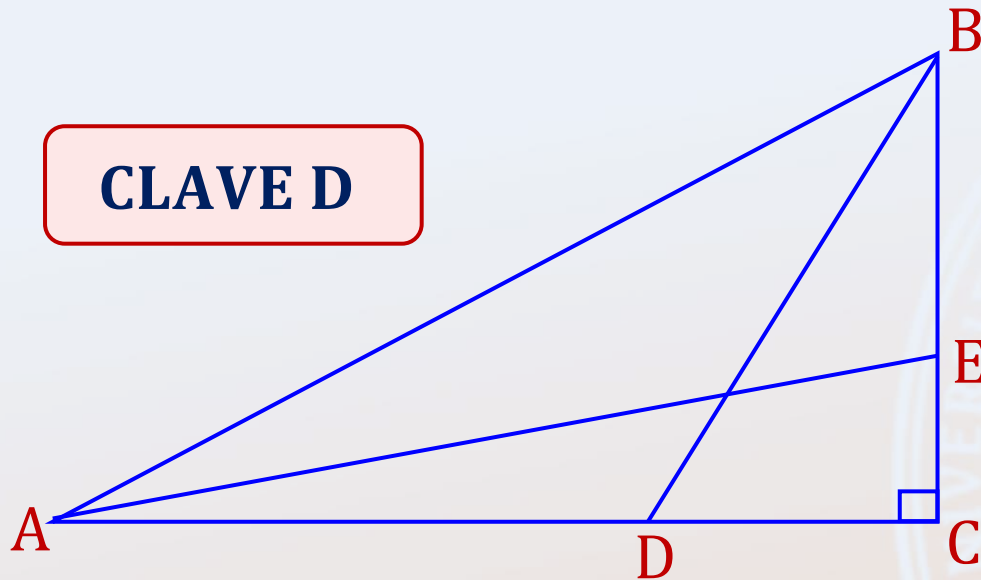
- A) $1/2$ B) $6/7$ C) $7/6$ D) $5/4$ E) $5/3$

CLAVE C

PROBLEMA 07 (3ra PC CEPRE 2016-2)

En la figura mostrada se sabe que $BE = 2(EC)$, $DC = BE$, $m\angle ABD = 45^\circ$ y $m\angle EAC = \theta$. Calcule $\cot(\theta)$.

CLAVE D



A) 7
D) 15

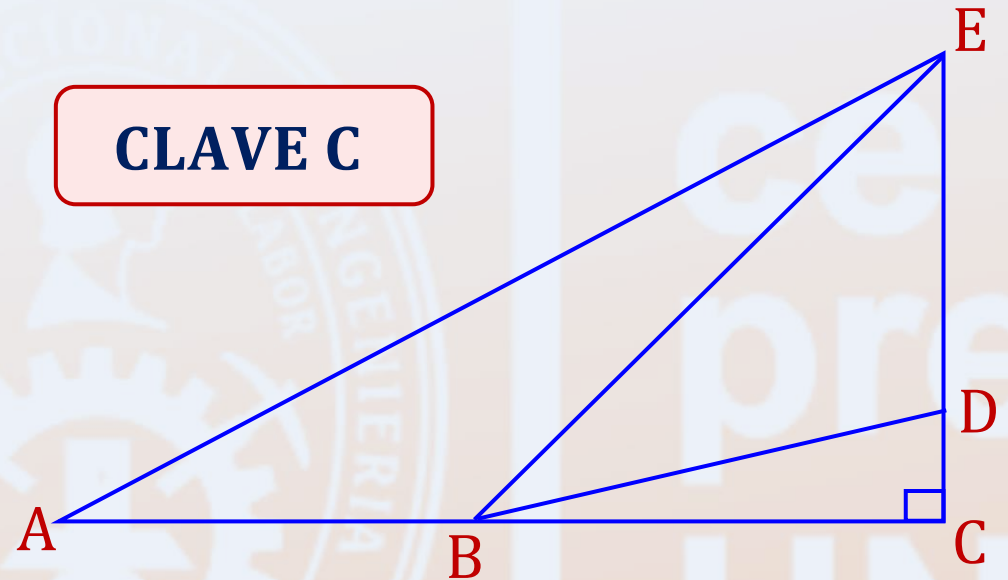
B) 10
E) 17

C) 13

PROBLEMA 08

En la figura mostrada se sabe que $AB = 3u$, $BC = xu$, $CD = 1u$, $DE = 5u$ y $m\angle EAB = m\angle EBD$. Calcule el menor valor de x .

CLAVE C



A) 1
D) 4

B) 2
E) 5

C) 3

PROBLEMA 09 (EX. ADMISIÓN UNI 2011 – II)

Si $\tan\left(\frac{4x}{7}\right) = a$ y $\tan\left(\frac{3x}{7}\right) = b$, entonces al simplificar $(1 - a^2b^2) \tan(x) \tan\left(\frac{x}{7}\right)$ se obtiene

CLAVE B

A) $a - b$

B) $a^2 - b^2$

C) $a + b$

D) ab

E) $\frac{a}{b}$

PROBLEMA 10 (3ra PC CEPRE 2017-2)

Calcule el valor de $\sec(22^\circ) \sec(23^\circ) + \sqrt{2} \tan(22^\circ) \tan(23^\circ)$

CLAVE C

A) $\sqrt{2}/2$

B) 1

C) $\sqrt{2}$

D) 2

E) $2\sqrt{2}$

IDENTIDADES AUXILIARES DE SUMA O DIFERENCIA DE ARCOS

Estas identidades son de uso frecuente y su aplicación permite una solución más rápida de los problemas.

1.
$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\alpha + \beta) = \tan(\alpha + \beta)$$

2.
$$\tan(\alpha) - \tan(\beta) - \tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha - \beta)$$

3.
$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha) - \sin^2(\beta)$$

4.
$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\beta)$$

5.
$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} = \tan(\alpha) \pm \tan(\beta)$$

6.
$$\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} = \cot(\beta) \pm \cot(\alpha)$$

7.
$$\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} = 1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)$$

8.
$$\frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha) \sin(\beta)} = \cot(\alpha) \cot(\beta) \mp 1$$

Demostraciones:

1. Consideremos la identidad: $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

Efectuamos: $\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha) \tan(\beta) \tan(\alpha + \beta) = \tan(\alpha) + \tan(\beta)$

Despejamos: $\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\alpha) \tan(\beta) \tan(\alpha + \beta) = \tan(\alpha + \beta)$ **Lqqd.**

3. Desarrollamos:

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = (\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta))(\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta))$$

Efectuamos: $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha) \cos^2(\beta) - \cos^2(\alpha) \sin^2(\beta)$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha) (1 - \sin^2(\beta)) - (1 - \sin^2(\alpha)) \sin^2(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha) - \sin^2(\beta) \quad \text{Lqqd.}$$

5. Desarrollamos: $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} + \frac{\cos(\alpha) \sin(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$

Simplificamos: $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} = \tan(\alpha) + \tan(\beta)$ **Lqqd.**

PROBLEMA 11

Calcule el valor de M^2 , siendo:

$$M = \frac{(\sqrt{3} - \tan(40^\circ) - \tan(20^\circ))\tan(25^\circ)}{(1 - \tan(25^\circ) - \tan(20^\circ))\tan(40^\circ)}$$

CLAVE D

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

PROBLEMA 12

Si se cumple:

$$\tan(2x) (\tan(x) + \tan(3x)) + \tan(4x) (\tan(3x) + \tan(5x)) = 9$$

Calcule el valor de $\tan(5x) \cot(x)$.

CLAVE D

A) 10

B) 11

C) 12

D) 13

E) 14

PROBLEMA 13

Dada la identidad:

$$\left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{12} + x \right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{12} - x \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (1 - \cos(2x)) = A \cdot \sin^B(Cx); \quad C > 0$$

Calcule el valor de $4A^2 + 5B - 3C$.

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

CLAVE E**PROBLEMA 14**

Al reducir la expresión:

$$\sin^2(x + y) - 2 \cos(x) \sin(y) \sin(x + y) + \cos^2(x)$$

se obtiene:...

A) $\cos^2(x)$ B) $\cos^2(y)$ C) $\sin^2(x)$ D) $\sin^2(y)$

E) 1

CLAVE B

PROBLEMA 15

Si: $(m + n) \cot(5\theta) = m \cdot \cot(9\theta) + n \cdot \cot(\theta)$

Expresa $\sin(9\theta) \cdot \csc(\theta)$ en términos de m y n .

- A) $\frac{m}{n}$ B) $\frac{n}{m}$ C) $\frac{m+n}{m-n}$ D) $\frac{m-n}{m+n}$ E) $\frac{m-n}{2m}$

CLAVE A

PROBLEMA 16

En un cuadrilátero ABCD, se cumple: $\sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{B}{2}\right) = \sin\left(\frac{C}{2}\right) \sin\left(\frac{D}{2}\right)$

Calcule el valor de: $\frac{\cot\left(\frac{A}{2}\right) - \cot\left(\frac{C}{2}\right)}{\cot\left(\frac{D}{2}\right) - \cot\left(\frac{B}{2}\right)}$

CLAVE B

- A) -1 B) 1 C) 2 D) -2 E) -1/2

Teorema

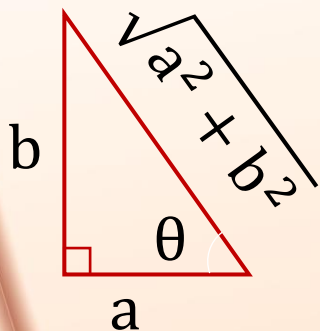
Si a y b son constantes reales, entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$a \sin(x) \pm b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x \pm \theta)$$

$$\text{donde } \tan(\theta) = \frac{b}{a}; a \neq 0$$

Demostración

$$a \sin(x) + b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{\overbrace{a}^{\cos(\theta)}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) + \frac{\overbrace{b}^{\sin(\theta)}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) \right)$$



$$a \sin(x) + b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\underbrace{\sin(x) \cos(\theta) + \cos(x) \sin(\theta)}_{\sin(x + \theta)})$$

$$a \sin(x) + b \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)$$

LQQD.

PROBLEMA 17

Calcule el valor aproximado de la expresión:

$$\frac{\cos(17^\circ) + \sqrt{3}\sin(17^\circ)}{4\cos(6^\circ) - 3\sin(6^\circ)}$$

CLAVE CA) $2/3$ B) $5/2$ C) $2/5$ D) $3/5$ E) $4/3$ **PROBLEMA 18**

Calcule el mayor valor de x ($x < 270^\circ$), correspondiente al máximo valor de la expresión: $\sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x)$.

CLAVE BA) 165° B) 195° C) 205° D) 210° E) 240°

Consecuencia:

Si a y b son constantes reales, entonces para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se cumple:

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin(x) + b \cos(x) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Por ejemplo:

✓ Si: $M = \sin(x) + \cos(x); \forall x \in \mathbb{R}$

$$M_{\text{máximo}} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$M_{\text{mínimo}} = -\sqrt{1^2 + 1^2} = -\sqrt{2}$$

✓ Si: $K = \sqrt{3} \sin(2x) - 3 \cos(2x); \forall x \in \mathbb{R}$

$$K_{\text{máximo}} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$K_{\text{mínimo}} = -\sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2} = -2\sqrt{3}$$

PROBLEMA 19

Calcule la diferencia entre el máximo y mínimo valor de:

$$\sqrt{3}\text{sen}(x) + 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right); x \in \mathbb{R}$$

CLAVE A

- A) $2\sqrt{13}$ B) $2\sqrt{11}$ C) $2\sqrt{10}$ D) $2\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{6}$

PROBLEMA 20

Si x es un número real, m representa el mínimo valor y n el máximo valor de la expresión K , siendo:

$$K = 3\sqrt{2}\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 5\cos(x)$$

CLAVE E

Calcule el valor de $3n^2 - 2m^2$.

- A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRES ARCOS

Para tres arcos x, y, z tenemos las siguientes identidades:

$$1) \quad \text{sen}(x + y + z) = \text{sen}(x) \cos(y) \cos(z) + \text{sen}(y) \cos(x) \cos(z) + \text{sen}(z) \cos(x) \cos(y) - \text{sen}(x) \text{sen}(y) \text{sen}(z)$$

$$2) \quad \cos(x + y + z) = \cos(x) \cos(y) \cos(z) - \text{sen}(x) \text{sen}(y) \cos(z) - \text{sen}(x) \text{sen}(z) \cos(y) - \text{sen}(y) \text{sen}(z) \cos(x)$$

$$3) \quad \tan(x + y + z) = \frac{\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) - \tan(x) \tan(y) \tan(z)}{1 - \tan(x) \tan(y) - \tan(y) \tan(z) - \tan(x) \tan(z)}$$

Demostración 1:

$$\begin{aligned} \text{sen}(x + y + z) &= \text{sen}(x + y) \cos(z) + \text{sen}(z) \cos(x + y) \\ &= (\text{sen}(x) \cos(y) + \text{sen}(y) \cos(x)) \cos(z) + \text{sen}(z) (\cos(x) \cos(y) - \text{sen}(x) \text{sen}(y)) \\ &= \text{sen}(x) \cos(y) \cos(z) + \text{sen}(y) \cos(x) \cos(z) + \text{sen}(z) \cos(x) \cos(y) - \text{sen}(x) \text{sen}(y) \text{sen}(z) \end{aligned}$$

Demostración 2:

$$\begin{aligned}
 \cos(x + y + z) &= \cos(x + y) \cos(z) - \sin(x + y) \sin(z) \\
 &= (\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)) \cos(z) - (\sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)) \sin(z) \\
 &= \cos(x) \cos(y) \cos(z) - \sin(x) \sin(y) \cos(z) - \sin(x) \sin(z) \cos(y) - \sin(y) \sin(z) \cos(x)
 \end{aligned}$$

Demostración 3:

$$\tan(x + y + z) = \frac{\tan(x + y) + \tan(z)}{1 - \tan(x + y) \tan(z)} = \frac{\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)} + \tan(z)}{1 - \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)} \tan(z)}$$

Efectuando:

$$\tan(x + y + z) = \frac{\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) - \tan(x) \tan(y) \tan(z)}{1 - \tan(x) \tan(y) - \tan(y) \tan(z) - \tan(z) \tan(x)}$$

Consecuencias:

✓ Consideremos la identidad:

$$\begin{aligned}\sin(x + y + z) = & \sin(x) \cos(y) \cos(z) + \sin(y) \cos(x) \cos(z) \\ & + \sin(z) \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \sin(z)\end{aligned}$$

Dividiendo cada término por $\cos(x) \cos(y) \cos(z)$ obtenemos:

4)
$$\frac{\sin(x + y + z)}{\cos(x) \cos(y) \cos(z)} = \tan(x) + \tan(y) + \tan(z) - \tan(x) \tan(y) \tan(z)$$

Dividiendo cada término por $\sin(x) \sin(y) \sin(z)$ obtenemos:

5)
$$\frac{\sin(x + y + z)}{\sin(x) \sin(y) \sin(z)} = \cot(x) \cot(y) + \cot(y) \cot(z) + \cot(z) \cot(x) - 1$$

Consecuencias:

✓ Consideremos la identidad:

$$\begin{aligned}\cos(x + y + z) = & \cos(x)\cos(y)\cos(z) - \sin(x)\sin(y)\cos(z) \\ & - \sin(x)\sin(z)\cos(y) - \sin(y)\sin(z)\cos(x)\end{aligned}$$

Dividiendo cada término por $\cos(x) \cos(y) \cos(z)$ obtenemos:

$$6) \quad \frac{\cos(x + y + z)}{\cos(x) \cos(y) \cos(z)} = 1 - \tan(x) \tan(y) - \tan(y) \tan(z) - \tan(x) \tan(z)$$

Dividiendo cada término por $\sin(x) \sin(y) \sin(z)$ obtenemos:

$$7) \quad \frac{\cos(x + y + z)}{\sin(x) \sin(y) \sin(z)} = \cot(x) \cot(y) \cot(z) - \cot(x) - \cot(y) - \cot(z)$$

PROPIEDADES PARA TRES ARCOS

I) Si $x + y + z = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$, entonces: $\sin(x + y + z) = 0$

Entonces a partir de las identidades **4** y **5**, se obtiene:

I. 1. $\tan(x) + \tan(y) + \tan(z) = \tan(x) \cdot \tan(y) \cdot \tan(z)$

I. 2. $\cot(x)\cot(y) + \cot(y)\cot(z) + \cot(z)\cot(x) = 1$

II) Si $x + y + z = (2n + 1)\pi/2$; $n \in \mathbb{Z}$, entonces: $\cos(x + y + z) = 0$

Entonces a partir de las identidades **6** y **7**, se obtiene:

II. 1. $\tan(x) \cdot \tan(y) + \tan(y) \cdot \tan(z) + \tan(z) \cdot \tan(x) = 1$

II. 2. $\cot(x) + \cot(y) + \cot(z) = \cot(x) \cdot \cot(y) \cdot \cot(z)$

IDENTIDADES ADICIONALES

1) Si $x + y + z = 0$, entonces

$$\cos^2(x) + \cos^2(y) + \cos^2(z) - 2 \cos(x) \cos(y) \cos(z) = 1$$

2) Si $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\sin^2(x) + \sin^2(y) + \sin^2(z) + 2 \sin(x) \sin(y) \sin(z) = 1$$

3) Si $x + y + z = \pi$, entonces

$$\cos^2(x) + \cos^2(y) + \cos^2(z) + 2 \cos(x) \cos(y) \cos(z) = 1$$

PROBLEMA 21 (EXAMEN UNI 2016 – I)**CLAVE C**

Sean x, y, z las medidas de los ángulos interiores de un triángulo tales que:
 $\cot(x) + \cot(y) = 3\tan(z)\cot(x)\cot(y)$. Determine $\tan(x)$ en función de y .

- A) $2 \tan(y)$ B) $3 \cos(y)$ C) $4 \cot(y)$ D) $3 \tan(y)$ E) $4 \sin(y)$

PROBLEMA 22**CLAVE C**

Calcul el valor de la expresión:

$$\frac{\sin(82^\circ)}{\sin(46^\circ) \sin(54^\circ)} + \frac{\sin(64^\circ)}{\sin(54^\circ) \sin(80^\circ)} + \frac{\sin(56^\circ)}{\sin(80^\circ) \sin(46^\circ)}$$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

PROBLEMA 23

En un triángulo ABC, halle el equivalente de la expresión:

$$\left[\frac{\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2} - \frac{C}{2}\right) \sin\left(\frac{A}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right)} + \cot\left(\frac{B}{2}\right) \right] \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

- A) $\tan\left(\frac{A}{2}\right)$ B) $\tan\left(\frac{B}{2}\right)$ C) $\tan\left(\frac{C}{2}\right)$ D) $\cot\left(\frac{A}{2}\right)$ E) $\cot\left(\frac{B}{2}\right)$

CLAVE D

PROBLEMA 24

Si $A + B + C = \pi$ y además se cumple: $\cot(A) + \cot(B) + \cot(C) = 4$

Calcule el valor de: $\csc^2(A) + \csc^2(B) + \csc^2(C)$

- A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

CLAVE C

PROBLEMA 25

Si α , β y θ son ángulos agudos tales que $\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$, se cumple:

$$2 \cot(\alpha) = 3 \cot(\beta) = 6 \cot(\theta)$$

Calcule el valor de $\tan(\alpha) \cot(\beta) \tan(\theta)$.

CLAVE C

- A) $4/3$ B) $1/3$ C) $2/3$ D) $2/7$ E) 1

PROBLEMA 26

En un triángulo ABC, se sabe que $\cot(A/2)$, $\cot(B/2)$ y $\cot(C/2)$ están en progresión aritmética, en ese orden.

Calcule el valor de: $\cot\left(\frac{A}{2}\right) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

CLAVE C